

Paweł Kufel

Wyższa Szkoła Bankowa w Toruniu

Porównanie jakości nieliniowych modeli ekonometrycznych na podstawie testów trafności prognoz

Streszczenie. Artykuł przedstawia porównanie jakości modeli o różnych postaciach analitycznych (nieliniowych i liniowych) opartych na koncepcji modelowania zgodnego. Elementem porównawczym są różnice w trafności prognoz otrzymanych na podstawie różnych modeli. Analizy różnic trafności prognoz dokonano na podstawie testu Diebolda-Mariano, a cała analiza została przeprowadzona na podstawie danych symulacyjnych.

Słowa kluczowe: analiza porównawcza, różnice trafności prognoz, test Diebolda-Mariano, modelowanie zgodne

Wprowadzenie

Celem artykułu jest zbadanie jakości modeli nieliniowych opartych na koncepcji modelowania zgodnego w kontekście trafności prognoz otrzymanych na podstawie tych modeli. W badaniu zostały porównane błędy prognoz *ex post* modeli o różnych postaciach analitycznych:

- liniowy zgodny,
- potęgowy zgodny,
- wykładniczy zgodny,

- model progowy TAR oparty na koncepcji modelowania zgodnego.

Rzeczywiste zależności ekonomiczne mogą wykazywać charakter liniowy albo nieliniowy. Badacz nie posiada dokładnej wiedzy na temat rzeczywistej zależności między wykorzystywanymi w badaniu procesami ekonomicznymi. Różne teorie ekonomiczne dają pewne wskazówki postaci zależności, jednakże w teoriach tych przyjmuje się wiele założeń, które nie muszą być spełnione w rzeczywistości. Dlatego już na etapie specyfikacji modelu przyjmowane są subiektywne założenia badacza. Ponadto bardzo często na dane zjawisko ekonomiczne ma wpływ wiele czynników, które nie są uwzględniane w modelu ekonometrycznym z powodu np. braku odpowiednich danych empirycznych, braku możliwości lub znaczących trudności w mierzeniu tych czynników lub innych. Kolejne ważne czynniki, jakie muszą być brane pod uwagę w trakcie modelowania ekonometrycznego, to odpowiednie własności estymatorów, poprawna weryfikacja modelu oraz zadbanie o zależności o charakterze czysto statystycznym.

W badaniu postawiono następujące hipotezy badawcze:

1. Modele ze strukturami autoregresyjnymi mogą być wykorzystane do opisu nieliniowych zależności.
2. Trafność prognozy nie zależy od przyjętej postaci analitycznej modelu.

Niniejsze badanie zostało przeprowadzone na podstawie symulacji Monte Carlo. Scenariusz eksperymentu zakładał wygenerowanie pewnych zależności nieliniowych, a następnie opisanie i wykonanie prognozy na podstawie modeli o różnych postaciach analitycznych (liniową, potęgową, wykładniczą i progową). Wykorzystując test Diebolda-Mariano, porównano różnice w trafnościach tych prognoz, a wyniki zostały przedstawione w postaci wykresów oraz tabel.

1. Scenariusz przeprowadzonego badania symulacyjnego

W badaniu przeprowadzono 3 eksperymenty numeryczne. Scenariusze eksperymentów są następujące.

Wygenerowano dwa procesy o strukturze autoregresyjnej pierwszego rzędu o postaciach:

- $x_{1t} = 1 + 0,7x_{1t-1} + u_t$,
- $x_{2t} = 1 + 0,9x_{2t-1} + u_t$.

Na podstawie powyższych procesów wygenerowano 3 procesy o zadanych postaciach nieliniowych:

- $y_t = 5 + 2x_{1t}^2 + 3x_{2t}^2 + 1,1x_{1t}x_{2t} + u_t$ – eksperyment 1,
- $y_t = \frac{5 + 2x_{1t}^2 + 3x_{2t}^2}{x_{1t}^2} + u_t$ – eksperyment 2,

$$- y_t = \frac{1000}{1,2x_{1t} + 0,8x_{2t} + u_t} - \text{eksperyment 3.}$$

Powyższe nieliniowe procesy były opisywane za pomocą 4 typów modeli:

1) liniowego zgodnego:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{1t-1} + \alpha_3 x_{1t-2} + \alpha_4 x_{2t} + \alpha_5 x_{2t-1} + \alpha_6 y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

2) potęgowego zgodnego:

$$y_t = \alpha_0 x_{1t}^{\alpha_1} x_{1t-1}^{\alpha_2} x_{2t}^{\alpha_3} x_{2t-1}^{\alpha_4} x_{y_t}^{\alpha_5} \varepsilon_t,$$

3) wykładniczego zgodnego:

$$y_t = \alpha_0 e^{\alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{1t-1} + \alpha_3 x_{2t} + \alpha_4 x_{2t-1} + \alpha_5 y_{t-1}} e^{\varepsilon_t},$$

4) progowego TAR opartego na koncepcji modelowania zgodnego

$$y_t = (\alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{1t-1} + \alpha_3 x_{2t} + \alpha_4 x_{2t-1} + \alpha_5 y_{t-1}) I\{\Delta y_t > 0\} + \varepsilon_t.$$

W następnym kroku, na podstawie powyższych modeli objaśniających wykonano prognozy na 20 okresów. Wyznaczono błędy *ex post* prognoz, a następnie zbadano istotność różnic pomiędzy błędami prognoz za pomocą testu Diebolda-Mariano. Porównano następujące pary błędów prognoz:

- liniowy zgodny z potęgowym zgodnym,
- liniowy zgodny z wykładniczym zgodnym,
- liniowy zgodny z progowym zgodnym.

W każdym ze scenariuszy zmianie ulegały następujące parametry:

- liczba obserwacji $n = \{20, 60, 120, 300\}$ oraz
- wartość zakłócenia $u_t \sim N(0, 1), N(0, 2), N(0, 3)$.

Wyniki eksperymentów zaprezentowane są w formie tabel oraz wykresów.

3. Koncepcja modelowania zgodnego¹

Koncepcja dynamicznego modelowania zgodnego², która uwzględnia w budowie zależności przyczynowo-skutkowe oraz wewnętrzną strukturę wykorzystanych procesów, jest autorstwa Profesora Zygmunta Zielińskiego. Przez zgodność

¹ Opracowano na podstawie: P. Kufel, *Błędy prognoz w ocenie jakości modeli – analiza symulacyjna*, „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Bankowej we Wrocławiu” 2010, nr 18, s. 227-236; M. Błażejowski, P. Kufel, T. Kufel, *Automatyczna procedura budowy specyfikacji zgodnego dynamicznego modelu ekonometrycznego w oprogramowaniu gretl*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici”, *Ekonomia* XXXIX, zeszyt 389, Wydawnictwo UMK, Toruń 2009, s. 83-91.

² Por. Z. Zieliński, *Zmienność w czasie strukturalnych parametrów modelu ekonometrycznego*, „Przegląd Statystyczny” 1984, R. XXXI, z. 1/2, s. 135-148; L. Talaga, Z. Zieliński, *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa 1986.

rozumie się zgodność harmonicznej struktury procesu objaśnianego z łączną harmoniczną strukturą procesów objaśniających oraz procesu resztowego, który jest niezależny od procesów objaśniających. Inaczej mówiąc: funkcja gęstości spektralnej procesu objaśnianego oraz łączna funkcja gęstości spektralnej procesów objaśniających oraz procesu resztowego są równe lub równoległe względem osi częstości. Model jest zawsze zgodny, gdy wszystkie wykorzystywane procesy mają własności białoszumowe:

$$\varepsilon_{yt} = \sum_{i=1}^k \rho_i \varepsilon_{x_{it}} + \varepsilon_t. \quad (1)$$

Funkcja gęstości spektralnej procesu o własnościach białego szumu jest stała względem osi częstości. Również funkcja gęstości spektralnej dla kombinacji liniowej procesów o własnościach białego szumu jest stała względem osi częstości, zatem obie te funkcje będą równoległe względem osi częstości, czyli taki model jest zgodny.

Niech Y_t i X_{it} ($i = 1, \dots, k$) oznaczają odpowiednio proces endogeniczny i wektor procesów objaśniających, dla których modele podstawowe, opisujące ich wewnętrzną strukturę, są następujące:

- modele opisujące składniki niestacjonarne:

$$Y_t = P_{yt} + S_{yt} + \eta_{yt}, \quad X_{it} = P_{x_{it}} + S_{x_{it}} + \eta_{x_{it}}, \quad (2)$$

gdzie: P_{yt} , $P_{x_{it}}$ – wielomianowe funkcje zmiennej czasowej t dla odpowiednich procesów, S_{yt} , $S_{x_{it}}$ – składniki sezonowe o stałej lub zmiennej amplitudzie wahań dla odpowiednich procesów, η_{yt} , $\eta_{x_{it}}$ – stacjonarne autoregresyjne procesy odnoszące się do odpowiednich procesów;

- modele autoregresyjne:

$$B(u)\eta_{yt} = \varepsilon_{yt}, \quad A_i(u)\eta_{x_{it}} = \varepsilon_{x_{it}}, \quad (3)$$

gdzie: $B(u)$, $A_i(u)$ – stacjonarne autoregresyjne operatory, dla których wszystkie pierwiastki równania $|B(u)| = 0$ i $|A_i(u)| = 0$ leżą poza okręgiem jednostkowym, ε_{yt} , $\varepsilon_{x_{it}}$ – białe szумы dla odpowiednich procesów. Rzeczywiste procesy ekonomiczne można przedstawić za pomocą struktur autoregresyjnych, ponieważ świadczy o tym ich charakter i przebieg³.

Znajomość wewnętrznej struktury wszystkich badanych procesów umożliwia budowę dynamicznego modelu zgodnego na podstawie zależności dla białoszumowych składników opisanej modelem (1).

Model zgodny dla rzeczywistych procesów Y_t i X_{it} uzyskuje się przez następujące podstawienia: do równania (1) podstawia się białe szумы z równań (3), następnie z równań (2) wyznacza się autoregresyjne procesy η_{yt} , $\eta_{x_{it}}$ i wstawia się je

³ Por. C. Granger, *The Typical Spectral Shape of Economic Variable*, „Econometrica” 1966, nr 34, s. 150-161.

do poprzednio otrzymanego równania. Po dalszych przekształceniach otrzymuje się następujący model:

$$B(u)Y_t = \sum_{i=1}^k A'_i(u)X_{it} + P_t + S_t + \varepsilon_t. \quad (4)$$

W modelu (4) proces resztowy ε_t jest taki sam jak w modelu (1). Oznacza to, że warunek zgodności struktur harmonicznych obu stron równania został spełniony. Model zgodny (4) zawiera wszystkie wewnętrzne składniki poszczególnych procesów, uwzględnione na etapie specyfikacji, do których zalicza się składniki sezonowe, trendowe oraz autoregresyjne.

3. Test Diebolda-Mariano

W badaniu symulacyjnym do porównania różnic trafności prognoz wykorzystano test Diebolda-Mariano, zaprezentowany w roku 1995. W teście tym badane są prognozy oparte na dwóch konkurujących ze sobą modelach. Niech $\{\hat{y}_{1t}\}_{t=1}^T$ będzie prognozą otrzymaną z modelu pierwszego, a $\{\hat{y}_{2t}\}_{t=1}^T$ z modelu drugiego. Wówczas $\{e_{1t}\}_{t=1}^T = \{y_t\}_{t=1}^T - \{\hat{y}_{1t}\}_{t=1}^T$ jest błędem *ex post* prognozy modelu pierwszego, a $\{e_{2t}\}_{t=1}^T = \{y_t\}_{t=1}^T - \{\hat{y}_{2t}\}_{t=1}^T$ jest błędem *ex post* prognozy dla modelu drugiego. Ponadto niech $g(y_t, \hat{y}_{1t}) = g(e_{1t})$ oraz $g(y_t, \hat{y}_{2t}) = g(e_{2t})$ będą wartościami funkcji straty g , za którą najczęściej przyjmuje się funkcję kwadratową lub wartość bezwzględną. Hipoteza zerowa stawiana w teście Diebolda-Mariano jest następująca:

$$H_0 : E[g(e_{1t})] = E[g(e_{2t})] \text{ lub równoważnie}$$

$$H_0 : E[d_t] = 0, \text{ gdzie } d_t = g(e_{1t}) - g(e_{2t}).$$

Hipoteza alternatywna może przyjmować jedną z trzech form, w zależności od rodzaju testu: dwustronnego, prawostronnego lub lewostronnego.

Zakładając dodatkowo, że szereg $\{d_t\}_{t=1}^T$ jest stacjonarny, otrzymuje się asymptotycznie rozkład normalny:

$$\sqrt{T}(\bar{d} - \mu) \rightarrow N(0, 2\pi f_d(0)),$$

gdzie $\bar{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [g(e_{1t}) - g(e_{2t})]$ jest średnią różnic funkcji strat, natomiast

$$f_d(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_d(\tau)$$

jest wartością gęstości spektralnej dla częstotliwości równej 0, a $\gamma_d(\tau) = E[(d_t - \mu)(d_{t-\tau} - \mu)]$ jest autokowariancją rzędu τ . W dużej próbie rozkład \bar{d} jest w przybliżeniu rozkładem normalnym o średniej μ i wariancji $2\pi f_d(0)/T$. Oczywiście jest wyznaczenie statystyki posiadającej rozkład $N(0, 1)$

o postaci $S = \frac{\bar{d}}{\sqrt{2\pi\hat{f}_d(0)}}$, gdzie $\hat{f}_d(0)$ jest zgodnym estymatorem $f_d(0)$ i jest równy

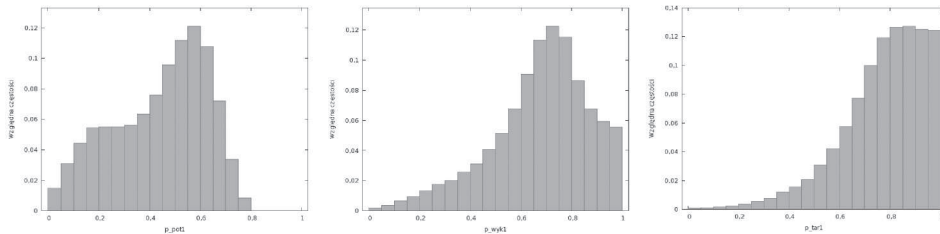
sumie wartości odpowiednich autokowariancji $2\pi\hat{f}_d(0) = \sum_{\tau=-(T-10)}^{T-1} \hat{\gamma}_d(\tau)$, zdefiniowanych jako $\hat{\gamma}_d(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=|\tau|+1}^T (d_t - \bar{d})(d_{t-|\tau|} - \bar{d})$.

W przeprowadzonym badaniu wykorzystano kwadratową funkcję straty g . Implementację testu Diebolda-Mariano wykonano w oprogramowaniu *gretl*.

4. Wyniki przeprowadzonego badania

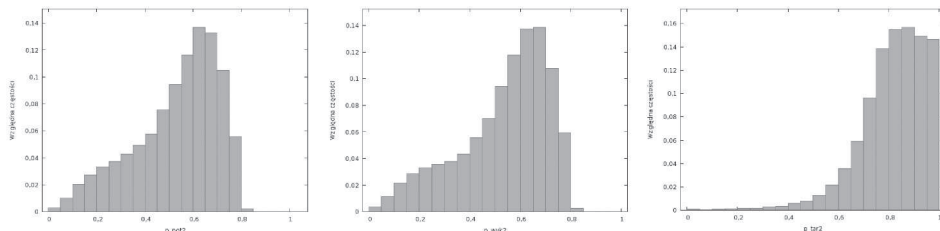
Wyniki przeprowadzonego badania zaprezentowane są na wykresach oraz w tabelach. Wykresy 1-3 przedstawiają rozkład empirycznego poziomu istotności dla testu Diebolda-Mariano dla prognoz otrzymanych z modelu liniowego zgodnego oraz modeli nieliniowych – potęgowego, wykładniczego oraz progowego dla poszczególnych eksperymentów.

Wykres 1. Wartości empirycznego poziomu istotności dla testu Diebolda-Mariano pomiędzy prognozami otrzymanymi z modelu liniowego i potęgowego (lewy), liniowego i wykładniczego (środkowy), liniowego i progowego (prawy) dla eksperymentu 1



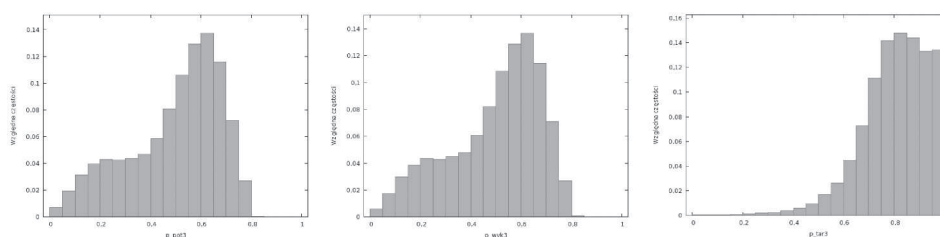
Źródło: obliczenia i opracowanie własne.

Wykres 2. Wartości empirycznego poziomu istotności dla testu Diebolda-Mariano pomiędzy prognozami otrzymanymi z modelu liniowego i potęgowego (lewy), liniowego i wykładniczego (środkowy), liniowego i progowego (prawy) dla eksperymentu 2



Źródło: obliczenia i opracowanie własne.

Wykres 3. Wartości empirycznego poziomu istotności dla testu Diebolda-Mariano pomiędzy prognozami otrzymanymi z modelu liniowego i potęgowego (lewy), liniowego i wykładniczego (środkowy), liniowego i progowego (prawy) dla eksperymentu 3



Źródło: obliczenia i opracowanie własne.

Tabele 1-3 przedstawiają udział modeli, dla których brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu Diebolda-Mariano, mówiącej o braku różnic między prognozami dla poszczególnych par prognoz z uwzględnieniem liczby obserwacji oraz stopnia zakłócenia.

Tabela 1. Udział modeli, dla których brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu Diebolda-Mariano dla par prognoz względem liczby obserwacji i stopnia zakłócenia dla eksperymentu 1 (w %)

<i>n</i>	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$
<i>n</i> = 20	97,60	97,28	97,60	99,42	99,40	99,42	99,40	99,52	99,40
<i>n</i> = 60	96,18	95,54	96,18	99,52	99,48	99,52	99,82	99,72	99,82
<i>n</i> = 120	94,28	94,48	94,28	99,40	99,58	99,40	99,94	99,90	99,94
<i>n</i> = 300	93,94	93,90	93,94	99,62	99,50	99,62	100,00	100,00	100,00
	Liniowy zg. vs. Potęgowy zgodny			Liniowy zg. vs. Wykładniczy zgodny			Liniowy zg. vs. Progowy zgodny		

Źródło: obliczenia i opracowanie własne.

Tabela 2. Udział modeli, dla których brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu Diebolda-Mariano dla par prognoz względem liczby obserwacji i stopnia zakłócenia dla eksperymentu 2 (w %)

<i>n</i>	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$
<i>n</i> = 20	98,88	98,72	98,88	98,64	98,24	98,64	99,58	99,52	99,58
<i>n</i> = 60	98,74	98,74	98,74	98,64	98,50	98,64	99,94	99,92	99,94
<i>n</i> = 120	98,64	98,78	98,64	98,34	98,72	98,34	100,00	100,00	100,00
<i>n</i> = 300	98,18	98,54	98,18	98,30	98,32	98,30	100,00	100,00	100,00
	Liniowy zg. vs. Potęgowy zgodny			Liniowy zg. vs. Wykładniczy zgodny			Liniowy zg. vs. Progowy zgodny		

Źródło: obliczenia i opracowanie własne.

Tabela 3. Udział modeli, dla których brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej testu Diebolda-Mariano dla par prognoz względem liczby obserwacji i stopnia zakłócenia dla eksperymentu 3 (w %)

n	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$	$\sigma = 1$	$\sigma = 2$	$\sigma = 3$
$n = 20$	98,10	98,08	98,10	98,16	98,08	98,16	99,64	99,78	99,64
$n = 60$	98,04	97,72	98,04	98,12	98,00	98,12	99,98	99,94	99,98
$n = 120$	97,50	97,04	97,50	97,80	97,50	97,80	99,98	100,00	99,98
$n = 300$	96,04	96,34	96,04	96,78	96,80	96,78	100,00	100,00	100,00
	Liniowy zg. vs. Potęgowy zgodny			Liniowy zg. vs. Wykładniczy zgodny			Liniowy zg. vs. Progowy zgodny		

Źródło: obliczenia i opracowanie własne.

Podsumowanie i wnioski

Przeprowadzone badanie symulacyjne, polegające na opisie i prognozowaniu zależności nieliniowych występujące między zjawiskami ekonomicznymi za pomocą modeli opartych na różnych postaciach analitycznych, daje podstawy do wyciągnięcia następujących wniosków. Test Diebolda-Mariano, badający różnice między prognozami opartymi na różnych modelach, wykazał w bardzo wysokim stopniu, że nie występują istotne różnice prognoz między modelem liniowym a potęgowym, liniowym a wykładniczym oraz liniowym a progowym. Należy tu zaznaczyć, że nie jest brana pod uwagę trafność poszczególnych prognoz. Test porównuje jedynie różnice między prognozami, czyli mogły one być tak samo dobre, jak i tak samo złe. Należy również podkreślić, że specyfikacja wszystkich modeli została oparta na koncepcji modelowania zgodnego, która zapewnia reszty o własnościach białego szumu. Na podstawie przeprowadzonego badania oraz prac m.in. Kufła⁴ można stwierdzić, że istnieje dowolność wyboru postaci analitycznej modelu w celu prognozowania. Niewielkie różnice między trafnością prognoz skłaniają do wykorzystania modeli o prostszych i mniej skomplikowanych postaciach analitycznych. Rekomenduje się wykorzystanie automatycznej procedury modelowania zgodnego zaimplementowanej w oprogramowaniu *gretl*⁵ jako narzędzia do opisu i prognozowania rzeczywistych procesów ekonomicznych.

⁴ P. Kufel, *Liniowy zgodny dynamiczny model ekonometryczny jako predyktor nieliniowych zależności*, „Współczesne problemy modelowania i prognozowania zjawisk społeczno-gospodarczych”, Wydawnictwo UE w Krakowie, Kraków 2009; P. Kufel, wyd. cyt.

⁵ Por. M. Błazejowski, P. Kufel, T. Kufel, wyd. cyt.

Literatura

- Błażejowski M., Kufel P., Kufel T., *Automatyczna procedura budowy specyfikacji zgodnego dynamicznego modelu ekonometrycznego w oprogramowaniu gretl*, „Acta Universitatis Nicolai Copernici”, *Ekonomia* XXXIX, zeszyt 389, Wydawnictwo UMK, Toruń 2009.
- Diebold F., Mariano R., *Comparing Predictive Accuracy*, „Journal of Business & Economic Statistics” 1995, vol. 1, nr 3.
- Doornik J., Hendry D., *Interactive Monte Carlo Experimentation in Econometrics using PcNaive 2*, TCL, London 2001.
- Enders W., *Applied Econometric Time Series*, „Wiley Series in Probability and Statistics”, wyd. 2, John Wiley & Sons, New York 2004.
- Granger C., *The Typical Spectral Shape of an Economic Variable*, „Econometrica” 1966, nr 34.
- Kufel P., *Liniowy zgodny dynamiczny model ekonometryczny jako predyktor nieliniowych zależności*, „Współczesne problemy modelowania i prognozowania zjawisk społeczno-gospodarczych”, Wydawnictwo UE w Krakowie, Kraków 2009.
- Kufel P., *Błędy prognoz w ocenie jakości modeli – analiza symulacyjna*, „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Bankowej we Wrocławiu” 2010, nr 18.
- Talaga L., Zieliński Z., *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa 1986.
- Zieliński Z., *Zmienność w czasie strukturalnych parametrów modelu ekonometrycznego*, „Przegląd Statystyczny” 1984, R. XXXI, z. 1/2.
- Zieliński Z., *Liniowe modele ekonometryczne jako narzędzie opisu i analizy przyczynowych zależności zjawisk ekonomicznych*, Wydawnictwo UMK, Toruń 1991.